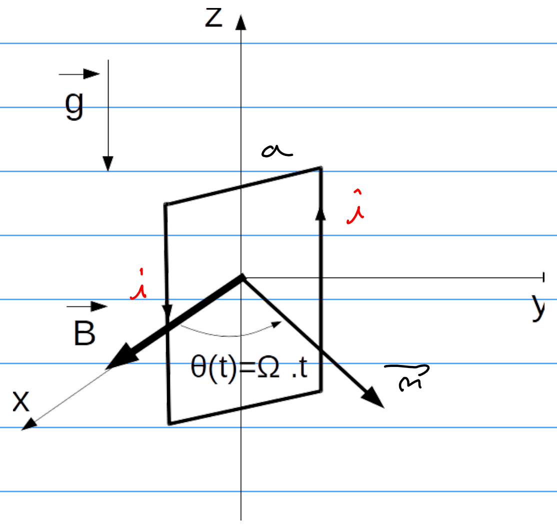
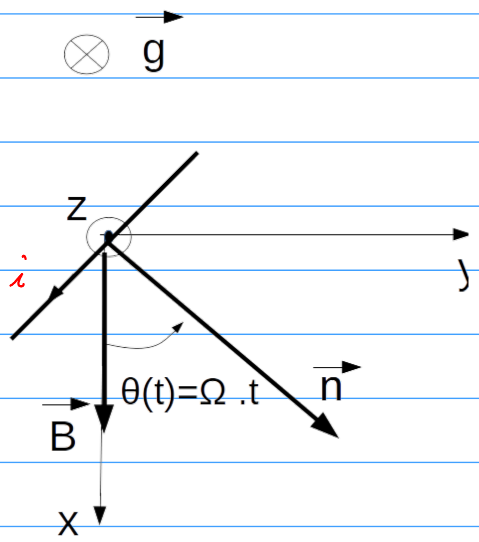
TD EM3 - Corrigé

EM2 - Principe de l'alternateur





1/ $\vec{m} = iS\vec{n} \Rightarrow \boxed{\vec{m} = iNa^2\vec{n}}$

2/ Analyse qualitative :

- rotation du rotor autour de Oz)

$\Rightarrow$ variation du flux Φ_B à travers le rotor.

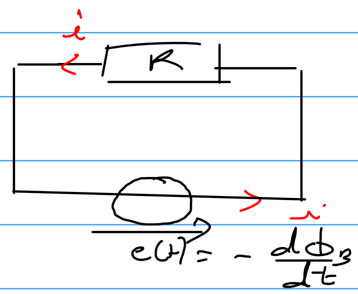
$\Rightarrow$ permettent un courant $i(t)$ induits.

$\Rightarrow$ actions mécaniques de Laplace

$\Rightarrow$ d'après la loi Lenz : couple résistant par rapport à Oz.

($\Rightarrow$ $i(t) > 0$ si $\theta \in [0, \pi]$)

3/ Schéma électrique équivalent au rotor



D'où $i(t) = \dfrac{e(t)}{R}$

avec $e(t) = -\dfrac{d}{dt}\Phi_B$

avec $\Phi_B = \iint_{rotor} \vec{B}\cdot\vec{dS} = \iint_{rotor} B_0\vec{e_x}\cdot dS\,\vec{n} = \underbrace{B_0\,\vec{e_x}\cdot\vec{n}}_{B_0\cos(\Omega t)} \underbrace{\iint_{rotor} dS}_{NS = Na^2}$

$$\boxed{\Phi_B = NB_0a^2\cos(\Omega t)}$$

Donc $e(t) = -\frac{d}{dt}\Phi_3 = NB_0 a^2 \Omega \sin(\Omega t)$

d'où $\boxed{i(t) = \frac{NB_0 a^2 \Omega \sin(\Omega t)}{R}}$

4/ $\vec{\Gamma} = \vec{m} \wedge \vec{B}$ nécessairement résistance en sens de la loi de Lenz (ou conservat° de l'énergie)

avec $\vec{B} = B_0 \vec{e_z}$

$\vec{m} = Na^2 i(t) \vec{n} = \frac{N^2 B_0 a^4 \Omega}{R} \sin(\Omega t) \vec{n}$

D'où $\vec{\Gamma} = \frac{N^2 B_0^2 a^4 \Omega}{R} \sin(\Omega t) \underbrace{\vec{n} \wedge \vec{e_x}}_{\sin(\Omega t) \times -\vec{e_z}}$

règle de la main droite

$\Rightarrow \boxed{\vec{\Gamma} = -\underbrace{\frac{N^2 B_0^2 a^4 \Omega \sin^2(\Omega t)}{R}}_{\forall t,\ \geq 0} \vec{e_z}}$

$\Rightarrow \forall t$, $\vec{\Gamma}$ est résistant

5/ Puissance électrique $\mathcal{P}_e$ reçue par le rotor :

$\mathcal{P}_e = e(t)\, i(t) = \frac{e^2(t)}{R}$

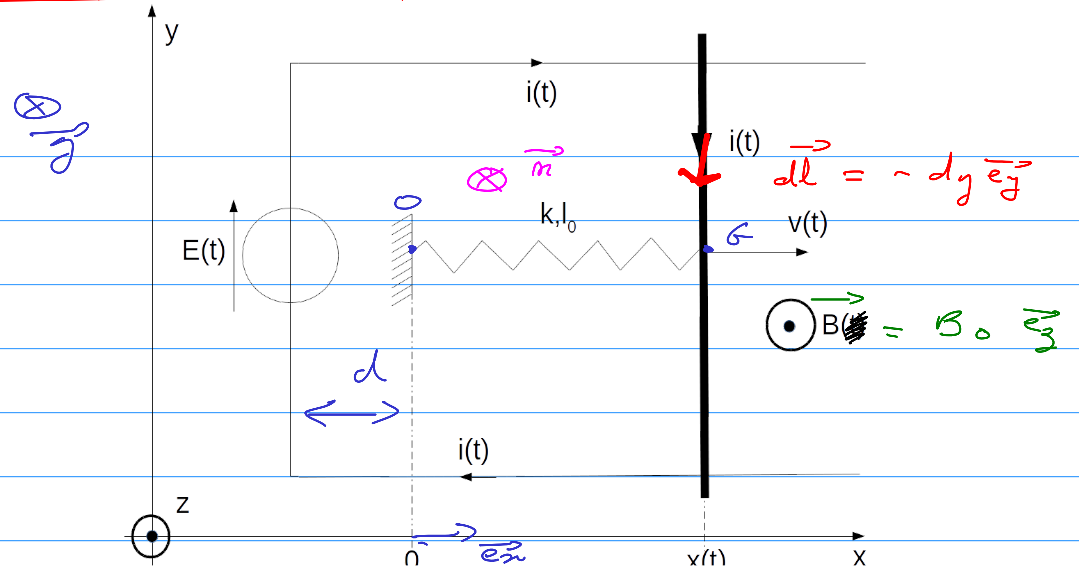
$\boxed{\mathcal{P}_e = \frac{N^2 a^4 B_0^2 \Omega^2 \sin^2(\Omega t)}{R}}$

Origine de $\mathcal{P}_e$? Maintien en rotation du rotor : puissance mécanique fournie par l'opérateur : $\mathcal{P}_m = -\mathcal{P}_{\text{action de Laplace}}$

$= -\vec{\Gamma} \cdot \underbrace{\vec{\Omega}}_{\Omega \vec{e_z}}$

$\Rightarrow \boxed{\mathcal{P}_m = \frac{N^2 B_0^2 a^4 \Omega^2 \sin^2(\Omega t)}{R} = \mathcal{P}_e.}$

EM3 - Principe du haut-parleur



1/ Equat° mécanique.

Syst : barre

Réf : $\mathcal{R}$, labo, galiléen.

Inventaire des act° mécaniques

- poids $\vec{P} = -mg\,\vec{e_z}$
- réact° normale des rails : $\vec{N} = N\,\vec{e_z}$
- force de rappel du ressort ; $\vec{F} = -k(l - l_0)\,\vec{e_x}$

avec $l = x(t)$

$x(t) - l_0 = X(t)$

$\Rightarrow \vec{F} = -kX(t)\,\vec{e_x}$

- frottements fluides ; $\vec{f} = -\mu \dot{x}\,\vec{e_x} = -\mu \dot{X}\,\vec{e_x}$
- force de Laplace ; $\vec{F_L} = \int_{barre} i(t)\,\vec{dl} \wedge \vec{B} = i(t)\,B_0\,-\vec{e_y} \wedge \vec{e_z} \times \int_{barre} dy$

$= -i(t)\,B_0\,a\,\vec{e_x}$

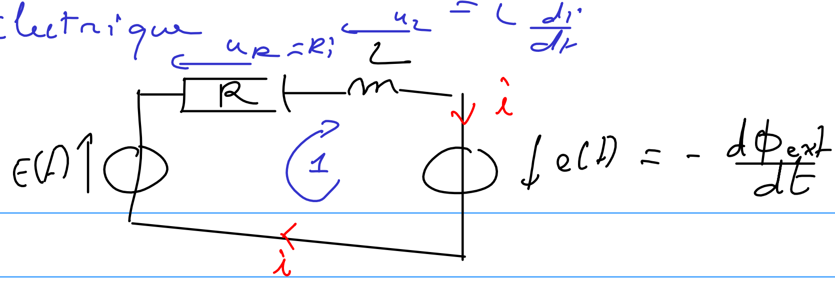
Théorème de centre de masse appliqué à la barre dans $\mathcal{R}$;

$$m\frac{d\vec{v_G}}{dt} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{F_L} + \vec{F} + \vec{f} \qquad \text{avec } \vec{v_G} = \dot{x}\,\vec{e_x} = \dot{X}\,\vec{e_x}$$

d'où :

- $\vec{e_z}$: $N = mg$
- $\vec{e_x}$: $\boxed{m\ddot{X} = -iB_0 a - kX - \mu\dot{X}}$ (1)

2. Équation électrique



1° : $E(t) - Ri - L\frac{di}{dt} + e(t) = 0$ (E)

avec $e(t) = -\frac{d(\Phi_{ext})}{dt}$ avec $\Phi_{ext} = \iint_{\text{circuit}} \vec{B}\cdot\vec{dS} = S(x) B_0 \vec{e_x}\cdot -\vec{e_x}$

$= -B_0 S(x)$

$= -B_0 a (d + x)$

$\Longrightarrow e(t) = B_0 a \dot{x} = B_0 a \dot{X}$

$$\boxed{E(t) - Ri - L\frac{di}{dt} + B_0 a \dot{X} = 0} \quad (E)$$

3/ $U = E_m + E_{elec}$

avec $E_m = \frac{1}{2} m \dot{X}^2 + \frac{1}{2} k X^2$

$E_{elec} = \frac{1}{2} L i^2$

$$\boxed{U = \frac{1}{2} m \dot{X}^2 + \frac{1}{2} k X^2 + \frac{1}{2} L i^2}$$

$\frac{dU}{dt} = ?$

puissance.

$\underbrace{m \ddot{X}\dot{X}}_{\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m \dot{X}^2\right)} = -i B_0 a \dot{X} - \underbrace{k X \dot{X}}_{\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} k X^2\right)} - \mu \dot{X}^2$ (R) $\times \dot{X}$ (1)

$E(t) i - R i^2 - \underbrace{L\frac{di}{dt} i}_{\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} L i^2\right)} + B_0 a \dot{X} i = 0$ (E) $\times i$ (2)

(1) − (2) :

$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m \dot{x}^2\right) - E i + R i^2 + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} L i^2\right) - B_0 a \dot{x} i$

puissance de la fem induite

même force de Laplace.

$= - i B_0 a \dot{x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} k x^2\right) - \mu \dot{x}^2$

$\frac{d}{dt}\underbrace{\left(\frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} L i^2 + \frac{1}{2} k x^2\right)}_{U} = E i + \underbrace{\cancel{B_0 a \dot{x} i} - \cancel{i B_0 a \dot{x}}}_{\text{conversion d'énergie mécanique en énergie électrique.}} - \mu \dot{x}^2 - R i^2$

$$\boxed{\frac{dU}{dt} = Ei - Ri^2 - \mu\dot{x}^2.}$$

Variation d'énergie du système.

puissance fournie par le G.B.F

puissance dissipée par effet Joule

puissance dissipée par frottement.

4/ $E(t) = E_0 \cos\omega t \Rightarrow i(t) = i_m \cos(\omega t + \varphi)$

$x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$

5/ $\underline{H} = \frac{\underline{X}}{\underline{E}}$ $\quad \underline{X} = \underline{X_m} e^{j\omega t}$, $\underline{i(t)} = \underline{i_m} e^{j\omega t}$

(E) : $-E_0 - B_0 a \times j\omega \underline{X_m} + jL\omega \underline{i_m} + R\underline{i_m} = 0$

(M) : $-m\omega^2 \underline{X_m} + k\underline{X_m} + aB\underline{i_m} + j\mu\omega \underline{X_m} = 0$

(E) ; $\underline{i_m} = \frac{E_0 + B_0 a j\omega \underline{X_m}}{R + jL\omega}$

(M) ; $-m\omega^2 \underline{X_m} + k\underline{X_m} + aB_0\left(\frac{E_0 + aB_0 j\omega \underline{X_m}}{R + jL\omega}\right) + j\omega\mu\underline{X_m} = 0$

$$\Rightarrow \underline{X_m} = \frac{1}{-m\omega^2 + k + \frac{(aB_0)^2 \times j\omega}{R + jL\omega} + j\omega\mu} \times - \frac{aB_0 E_0}{(R + jL\omega)}$$

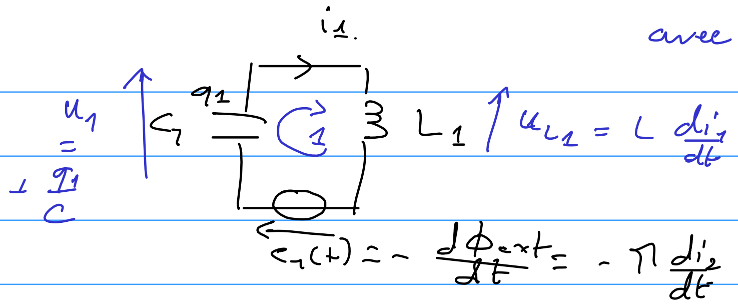
$$\underline{X_m} = \frac{-aB_0E_0}{-m\omega^2(R + jL\omega) + (aB_0)^2 \times j\omega + j\omega\mu(R + jL\omega) + k(R + jL\omega)}$$

$$\underline{X_m} = \frac{-aB_0E_0}{-mR\omega^2 - jmL\omega^3 + j(aB_0)^2\omega + j(\mu R)\omega - \mu L\omega^2 + kR + jLk\omega}$$

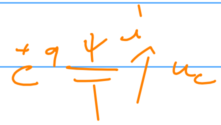
$$\underline{X_m} = \frac{aB_0E_0}{-kR - j(kL + (aB_0)^2 + \mu R)\omega + (mR - \mu L)\omega^2 + jmL\omega^3}$$

$$\boxed{\underline{H} = \frac{aB_0}{-kR - j(kL + (aB_0)^2 + \mu R)\omega + (mR - \mu L)\omega^2 + jmL\omega^3}}$$

Ex3 -



avec $\Phi_{ext} = M i'_2$



$i = C\frac{du}{dt}$

$u = \frac{q}{C}$

$i = \frac{dq}{dt}$

$(\mathcal{C}_1)$: $+\frac{q_1}{C} - L\frac{di_1}{dt} - M\frac{di'_2}{dt} = 0$ avec $i_1 = -\dot q_1$

$i'_2 = -\dot q_2$

$L\ddot q_1 + M\ddot q_2 + \frac{q_1}{C} = 0$ couplage avec le circuit $\mathcal{C}_2$

$$\boxed{\ddot q_1 + k\ddot q_2 + \omega_0^2 q_1 = 0}$$

De même : $\boxed{\ddot q_2 + k\ddot q_1 + \omega_0^2 q_2 = 0}$

couplage avec $\mathcal{C}_1$.

$$\boxed{\begin{cases} \ddot q_1 + k\ddot q_2 + \omega_0^2 q_1 = 0 & (1) \\ \ddot q_2 + k\ddot q_1 + \omega_0^2 q_2 = 0 & (2) \end{cases}}$$

3/ $u = \frac{1}{2}(q_1 + q_2)$ et $v = \frac{1}{2}(q_1 - q_2)$

(1) + (2) : $\ddot u\,(1+k) + \omega_0^2 u = 0$

$\Leftrightarrow \ddot u + \frac{\omega_0^2}{1+k} u = 0$ $\boxed{\omega_1^2 = \frac{\omega_0^2}{1+k}}$

$\Leftrightarrow \boxed{\ddot u + \omega_1^2 u = 0}$

(1) $\boxed{\ddot v + \omega_2^2 v = 0}$ $\boxed{\omega_2^2 = \frac{\omega_0^2}{1-k}.}$

$u(t) = A\cos(\omega_1 t + \varphi_1)$

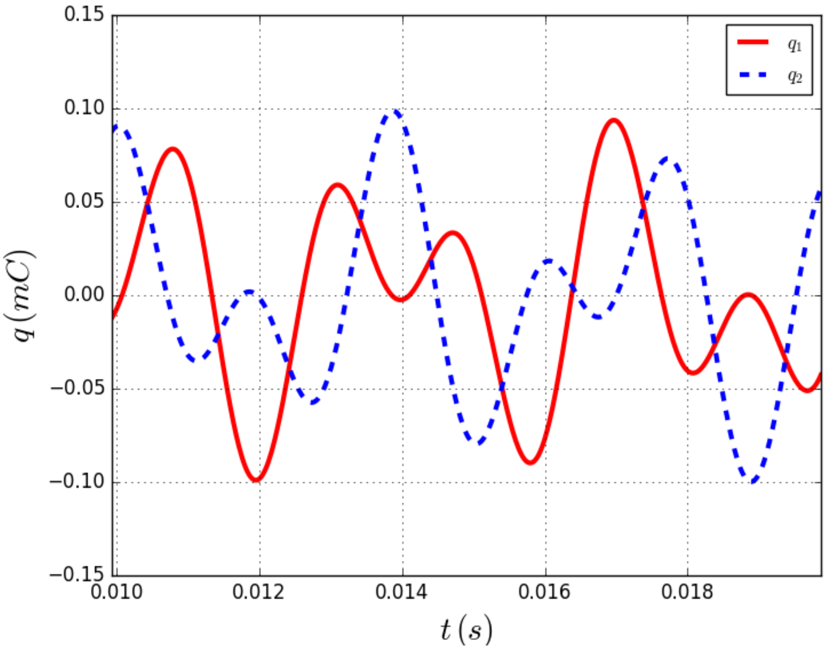
$v(t) = B\cos(\omega_2 t + \varphi_2)$

On a $q_1(t) = u + v \Rightarrow$ $q_1(t) = A\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + B\cos(\omega_2 t + \varphi_2)$

$q_2(t) = u - v \Rightarrow$ $q_2(t) = A\cos(\omega_1 t + \varphi_1) - B\cos(\omega_2 t + \varphi_2)$

3/ $k = 0,5$ oscillat° anharmoniques des deux circuits
$\longrightarrow$ couplage fort à l'échelle de $T_0 = 2\pi/\omega_0$
$k = 5 \times 10^{-4}$ oscillat° harmonique d'un seul
des circuits $\longrightarrow$ couplage faible à l'échelle de T_0

$k = 0,5$



$k = 5 \cdot 10^{-4}$